

**Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2025-2026 учебный год, 11 класс**

11.1. Решите неравенство: $x + y^2 + \sqrt{x - y^2} - 2025 \leq 2025$

Ответ: (2025, 0)

Решение:

Два последних слагаемых в левой части неравенства неотрицательны, поэтому $x \leq 2025$. Подкоренное выражение также неотрицательно, поэтому $x \geq 2025$. Значит, $x = 2025$. Теперь из неравенства следует, что $y = 0$.

Критерии оценки:

1. Отмечено одно из утверждений $x \leq 2025$ или $x \geq 2025$, дальнейшее продвижение отсутствует – 1 балл.
2. Найдено значение $x=2025$ – 4 балла.

11.2. На доску выписаны 2025 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди чисел?

Ответ: 2023

Решение:

Положим $n=2025$. Упорядочим выписанные числа в неубывающем порядке: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Поскольку число $a_1 + a_2 + a_3 \geq a_1$, то $a_2 + a_3 \geq 0$. Аналогично получаем $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \leq a_n$, откуда $a_{n-2} + a_{n-1} \leq 0$. Таким образом, $0 \geq a_{n-2} + a_{n-1} \geq a_2 + a_3 \geq 0$.

Значит, $a_{n-2} + a_{n-1} = a_2 + a_3 = 0$. Так как $a_2 \leq a_3 \leq a_{n-2} \leq a_{n-1}$. Отсюда вытекает, что $a_{n-2} = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_3 = 0$. Итак, среди выписанных 2025 чисел хотя бы 2023 нулей. Пример из 2023 нулей, 1 и -1 показывает, что нулей может быть ровно 2023.

Критерии оценки:

1. Только ответ – 0 баллов.
2. Приведён пример, что нулей может быть 2023 или показано только, что $a_2 + a_3 \geq 0$ или $a_{n-2} + a_{n-1} \leq 0$ – 1 балл.
3. Показано только, что среди чисел не более двух положительных или двух отрицательных – 3 балла.

4. Доказано только, что нулей может быть не меньше 2023 – 5 баллов.

11.3. При каком наибольшем натуральном k клетки таблицы 5×5 можно заполнить нулями и единицами (в каждой клетке должно стоять ровно одно число) так, чтобы нашлись k строк, в каждой из которых сумма чисел не меньше 3, и k столбцов, в каждом из которых сумма чисел не больше 2?

Ответ: при $k = 4$

Решение:

При $k = 5$ таблицу искомым образом заполнить нельзя, так как при счете суммы чисел в таблице сложением сумм по строкам получается, что она не меньше $3 \times 5 = 15$, а при счете той же суммы по столбцам получается, что она не больше $2 \times 5 = 10$.

Пример заполнения таблицы, удовлетворяющего условию задачи при $k = 4$, приведен на рисунке справа.

1	1	0	0	1
1	1	0	0	1
0	0	1	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	1

Критерии оценки:

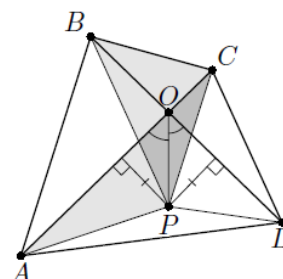
1. Есть оценка, но нет примера – 2 балла.
2. Есть пример, но нет оценки – 4 балла.

11.4. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O . Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD .

Доказательство:

Поскольку $AB \parallel CP$, площади треугольников APC и BPC равны. Поскольку $CD \parallel BP$, площади треугольников BPC и CPD равны. Следовательно, площади треугольников APC и CPD равны. Так как $AC = BD$, равны и высоты этих треугольников, опущенные на стороны AC и BD соответственно.

Но это означает, что точка P , лежащая внутри угла AOD , равноудалена от его сторон, и потому лежит на его биссектрисе, что и требовалось доказать.



Критерии оценки:

Общие критерии в зависимости от продвижения.

11.5. 200 человек стоят по кругу. Каждый из них либо лжец, либо конформист. Лжец всегда лжет. Конформист, рядом с которым стоят два конформиста, всегда говорит правду. Конформист, рядом с которым стоит хотя бы один лжец, может как говорить правду, так и лгать. 100 из стоящих сказали: «Я — лжец», 100 других сказали: «Я — конформист». Найдите наибольшее возможное число конформистов среди этих 200 человек.

Ответ: 150

Решение:

Оценка. Лжец не может сказать: «Я — лжец». Поэтому 100 человек, сказавшие: «Я — лжец», — конформисты. Все они солгали, поэтому рядом с каждым из них стоит лжец. Так как рядом со лжецом могут стоять максимум два конформиста, лжецов не меньше 50. Значит, конформистов не больше 150. **Пример.** Ставим по кругу 50 лжецов. В каждый из 50 промежутков между лжецами ставим трех конформистов. Средний из этих трех говорит правду, двое крайних лгут, что они лжецы, а все лжецы лгут, что они конформисты.

Критерии оценки:

1. Есть пример, но нет оценки – 3 балла.
2. Есть оценка, но нет примера – 4 балла.